OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARU

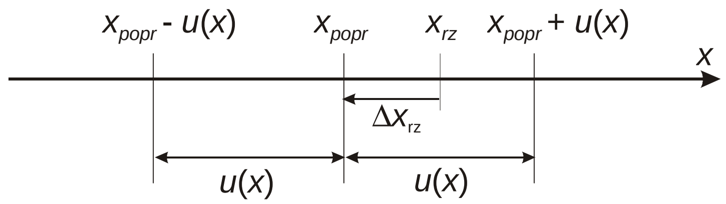
ANALIZA NIEPEWNOŚCI

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest poznanie podstawowych zagadnień związanych z wyznaczaniem niepewności wyników pomiaru.

2. NIEPEWNOŚĆ

Graficzną interpretację relacji występujących między parametrami wyniku przedstawiono na rys.3.



Rys.1. Interpretacja relacji występujących między parametrami wyniku pomiaru

Na rys.1. punkty $x_{popr} - u(x)$ i $x_{popr} + u(x)$ wyznaczają granice przedziału, w którym *z określonym prawdopodobieństwem* znajduje się wartość rzeczywista x_{rz}. Parametr $u(x)$ jest nazywany **niepewnością bezwzględną**.

Niepewność ma zawsze znak dodatni, gdyż wyraża długość jednostronnego przedziału. Często niepewność wyniku pomiaru zapisuje się jako $x_{popr} \pm u(x)$, co oznacza iż wartość rzeczywista wielkości mierzonej, z określonym prawdobodobieństwem, znajduje się w przedziale o szerokości $2u(x)$, symetrycznym względem wartości poprawnej.

Niepewność względną $u_r(x)$ definiuje się jako stosunek niepewności bezwzględnej do modułu wartości poprawnej:

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{|x_{popr}|} \tag{1}$$

3. KLASYFIKACJA NIEPEWNOŚCI

Zgodnie z ustaleniami międzynarodowymi [1] wyróżnia się dwa typy niepewności:

1) niepewność typu A,

2) niepewność typu B.

Ad.1) **do niepewności typu A** zalicza się niepewności, których rozkłady są znane lub mogą być oszacowane na podstawie powtarzalnych pomiarów, wykonanych w nominalnie takich samych warunkach. Ocena niepewności typu A wykorzystuje ustalony algorytm: wyznacza się wartość średnią, niepewność pojedynczego wyniku oraz niepewność wartości średniej.

Wyznaczenie niepewności typu A wymaga wykonania serii pomiarów, w celu ujawnienia losowego charakteru ich zmian.

Ad.2) jeśli niepewność szacowana jest nie na podstawie powtarzalnych pomiarów, ale innych danych, to nazywa się ją niepewnością typu B. Do **niepewności typu B** zaliczyć można niepewności przyrządów podane w ich dokumentacji, świadectwach kalibracji, wartości współczynników podane w normach i tablicach. Jeśli niepewność wyniku nie jest określona i nie ma możliwości jej oceny, to przedział niepewności określa się na podstawie liczby cyfr znaczących wyniku.

4. SZACOWANIE STANDARDOWEJ NIEPEWNOŚCI TYPU A

Oszacowanie niepewności typu A jest możliwe jedynie wtedy, gdy wykonano serię pomiarów x_1, x_2, ... x_N, gdzie N>1. Przede wszystkim należy w serii wykryć i usunąć wyniki obarczone błędem nadmiernym. Gdy liczba czynników zakłócających pomiar jest duża i żaden z nich nie dominuje, to można założyć, iż rozkład losowy błędu pomiaru jest rozkładem zbliżonym do rozkładu normalnego (Gaussa). Wyróżnia się dwa przypadki:

1) seria pomiarów jest długa ($N \geq 10$),
2) seria pomiarów jest krótka ($N < 10$).

Ad.1) **dla długiej serii pomiarów**, korzystając z metody estymacji punktowej oblicza się:

- wartość poprawną wyniku, którą jest **średnia arytmetyczna**:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n \quad , \qquad (2)$$

- **odchylenie standardowe średniej arytmetycznej**:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} \quad , \qquad (3)$$

gdzie

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left(x_n - \bar{x}\right)^2} \qquad (4)$$

jest **odchyleniem standardowym pojedynczego wyniku**.

Standardowa niepewność typu A $u_A(x)$ jest równa:

$$u_A(x) = s_{\bar{x}} \qquad (5)$$

Ad.2) **dla krótkiej serii wyników pomiaru** o błędach przypadkowych będących zmienną losową o rozkładzie normalnym obliczone wartości $\bar{x}$ i s_x mogą się znacznie różnić od parametrów tego rozkładu. W tym przypadku, w celu zwiększenia wiarygodności wyników, korzysta się z rozkładu *t*-Studenta [1].

Gdy liczba wyników pomiaru N wzrasta, to rozkład Studenta staje się bliski rozkładowi normalnemu. Dla $N \geq 10$ można w większości przypadków korzystać z rozkładu normalnego.

W rozkładzie Studenta występuje pojęcie **liczby stopni swobody** k :

$$k = N - 1 \tag{6}$$

gdzie N jest liczbą wyników pomiaru w serii.

Standardową niepewność typu A wyznacza się następująco:

1. Dla standardowej niepewności typu A przyjmuje się poziom ufności (prawdopodobieństwo) α =0,6827. Jest to poziom ufności, któremu w rozkładzie normalnym odpowiada kwantyl równy odchyleniu standardowemu pojedynczego wyniku pomiaru.
2. Oblicza się liczbę stopni swobody k ze wzoru (10).
3. Korzystając z tablicy rozkładu Studenta dla obliczonego k i przyjętego α wyznacza się kwantyl $t_{k,\alpha}$.
4. Oblicza się standardową niepewność typu A ze wzoru

$$u_A(x) = t_{k,\alpha} s_{\bar{x}} \tag{7}$$

Wartości kwantyli $t_{k,\alpha}$ dla rozkładu Studenta w zależności od liczby stopni swobody *v* zamieszczono w tablicy 1.

Tablica 1

Wartości kwantyli $t_{k,\alpha}$ dla rozkładu Studenta dla poziomu ufności α =0,6827 w zależności od liczby stopni swobody k

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	50	100
$t_{k,\alpha}$	1,84	1,32	1,20	1,14	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05	1,05	1,04	1,01	1,005

5. OCENA NIEPEWNOŚCI TYPU B W POMIARACH BEZPOŚREDNICH

W niektórych przypadkach rozrzut wyników jest bardzo mały i dominującą niepewnością jest niepewność związana z niedoskonałością aparatury lub przyjętej metody pomiarowej, zwana niepewnością typu B. Nie można jej scharakteryzować metodami statystycznymi, jak w przypadku niepewności typu A, ponieważ nie dysponuje się serią wyników. Z tego powodu do oceny niepewności typu B wykorzystuje się wszelkie dostępne informacje, którymi mogą być:

- znajomość zjawisk występujących w pomiarach;
- właściwości przyrządów i metod pomiarowych;
- informacje zawarte w dokumentacji przyrządów;
- świadectwa i certyfikaty kalibracyjne przyrządów;
- dane z wcześniej przeprowadzonych pomiarów;
- doświadczenie lub intuicja eksperymentatora.

Najczęściej przyjmuje się, że niepewność typu B charakteryzuje się rozkładem jednostajnym i z poziomem ufności α =1 zawiera się w przedziale ±*a* wokół wartości poprawnej. Wówczas standardowa niepewność typu B jest równa [1]

$$u_B(x) = \frac{a}{\sqrt{3}} . \tag{8}$$

Wyznaczenie $u_B(x)$ przyrządu jest ułatwione w przypadku, gdy znany jest jego bezwzględny błąd graniczny $\Delta_{gc}x$. Wówczas przyjmuje się, że $a = \Delta_{gc}x$.

Przykład 1

Obliczyć niepewność typu B woltomierza wskazówkowego klasy 0,5 o zakresie 100 V, zdeterminowaną klasą przyrządu.

Rozwiązanie:

Można przyjąć, że wewnątrz symetrycznego przedziału wokół wartości poprawnej zmierzonego napięcia, o szerokości połówkowej równej

$$\Delta U = \frac{klasa \cdot zakres}{100} = \frac{0{,}5 \cdot 100}{100} = 0{,}5\ \mathrm{V}$$

prawdopodobieństwo wystąpienia wartości prawdziwej mierzonego napięcia, którą reprezentuje wartość poprawna, jest w każdym punkcie jednakowe (opisuje je rozkład jednostajny). Standardowa niepewność typu B jest równa

$$u_B(U) = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = 0{,}287\ \mathrm{V}$$

Jedną ze składowych niepewności typu B jest składowa spowodowana ograniczoną rozdzielczością pomiaru. Jeśli producent nie podał sposobu jej obliczania, to dla przyrządów z odczytem cyfrowym, wykorzystujących wbudowany mikroprocesor do przeliczania wyniku przyjmuje się, iż maksymalny błąd rozdzielczości jest równy wartości odpowiadającej $\pm 0{,}5$ najmniej znaczącej cyfry wyświetlacza. Wynika to z założenia, że wynik pomiaru jest przed wyświetleniem prawidłowo zaokrąglony. W przypadku tanich multimetrów wyposażonych w przetwornik analogowo-cyfowy o podwójnym całkowaniu przyjmuje się, iż maksymalny błąd rozdzielczości jest równy wartości odpowiadającej ± 1 najmniej znaczącej cyfry wyświetlacza. We wszystkich przypadkach przyjmuje się, iż rozkład tego błędu w określonym przedziale jest jednostajny Związaną z tą składową niepewność typu B oblicza się ze wzoru (19).

Przykład 2

Obliczyć niepewność typu B woltomierza cyfrowego, którym na zakresie U_n = 20 V dokonano pomiaru napięcia. Woltomierz wyświetlił wartość U = 4,324 V. Z dokumentacji przyrządu wynika, iż maksymalny błąd pomiaru jest równy 0,05% U + 0,005% U_n + 1 cyfra (LSD), gdzie U jest wartością napięcia odczytaną z wyświetlacza przyrządu.

Rozwiązanie:

Błąd rozdzielczości pomiaru jest równy:

$$\Delta_\mathrm{r} U = \frac{\Delta n}{n} U = \frac{1}{4324} 4{,}324 = 1\,\mathrm{mV}$$

Można przyjąć, iż wewnątrz symetrycznego przedziału wokół napięcia U, o szerokości połówkowej równej

$$\Delta U = \frac{0{,}05}{100} U + \frac{0{,}005}{100} U_\mathrm{n} + \Delta_\mathrm{r} U = \frac{0{,}05}{100} \cdot 4{,}324 + \frac{0{,}005}{100} \cdot 20 + 0{,}001 = 4{,}162\,\mathrm{mV}$$

prawdopodobieństwo wystąpienia wartości prawdziwej mierzonego napięcia, którą reprezentuje wartość poprawna, jest w każdym punkcie jednakowe (opisuje je rozkład jednostajny). Standardowa niepewność typu B jest równa

$$u_B(U) = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}} = \frac{4{,}162}{\sqrt{3}} = 2{,}40\,\mathrm{mV}$$

Uwaga: jeśli w dokumentacji przyrządu są podane jedynie poszczególne składniki błędu granicznego (np. błąd wartości zmierzonej, wartości charakterystycznej zakresu, rozdzielczości itp.), to w większości wypadków można założyć, iż składniki te są niezależne od siebie (nieskorelowane). Wówczas szerokość połówkową przedziału w którym zawiera się błąd oblicza się ze wzoru:

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{\delta_\mathrm{g} U}{100} U\right)^2 + \left(\frac{\delta_\mathrm{g} U_n}{100} U_n\right)^2 + (\Delta_\mathrm{r} U)^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}05}{100} \cdot 4{,}324\right)^2 + \left(\frac{0{,}005}{100} \cdot 20\right)^2 + (0.001)^2} =$$
$$= 2{,}583\,\mathrm{mV}$$

Tak obliczona wartość $\Delta_\mathrm{gc} x$ jest mniejsza od wartości wyznaczonej ze wzoru (5). Oczywiście standardowa niepewność typu B jest wtedy również mniejsza:

$$u_B(U) = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}} = \frac{2{,}583}{\sqrt{3}} = 1{,}49\,\mathrm{mV}$$

6. OBLICZANIE STANDARDOWEJ NIEPEWNOŚCI ZŁOŻONEJ W POMIARACH BEZPOŚREDNICH

Obliczanie standardowej **niepewności złożonej** często występuje w praktyce: występują błędy losowe reprezentowane przez niepewność u_A typu A, której przypisać można rozkład normalny, oraz błędy przyrządów pomiarowych, którym można z reguły przypisać rozkład jednostajny, a które są scharakteryzowane przez niepewność u_B typu B. Błędy te są z reguły nieskorelowane (niezależne od siebie).

Standardową niepewność złożoną u_c pomiaru, z uwzględnieniem niepewności przyrządu pomiarowego (czyli niepewności typu B), oblicza się wg następującego algorytmu:

1. Oblicza się standardową niepewność u_A typu A;
2. Oblicza się standardową niepewność u_B typu B;
3. Oblicza się standardową niepewność złożoną u_c ze wzoru

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}\,; \tag{9}$$

4. Podaje się końcowy wynik w następującej postaci:

$$x = \bar{x} \pm u_c\,,$$

   z dodanym następującym komentarzem: „gdzie liczba zapisana za symbolem ± jest wartością złożonej niepewności standardowej u_c, a nie jest przedziałem ufności”.

Podany wyżej sposób zapisu wyniku pomiaru jest zalecany przez [1].

Przykład 3

Woltomierzem cyfrowym o rozdzielczości 4½ cyfry dokonano, na zakresie U_n =750 V, pomiaru napięcia sieci elektroenergetycznej. Średnia z $N = 20$ pomiarów wynosiła $\overline{U} = 230{,}4\ \mathrm{V}$ z odchyleniem standardowym $s_U = 1{,}8$ V. W dokumentacji przyrządu zawarta jest informacja, iż błąd pomiaru jest równy 0,5% wartości zmierzonej oraz 0,05% wartości charakterystycznej zakresu. Prawidłowo zapisać wynik pomiaru.

<u>Rozwiązanie:</u>

Niepewność typu A pomiaru oblicza się ze wzoru:

$$u_A(\overline{U}) = \frac{s_U}{\sqrt{N}} = \frac{1{,}8}{\sqrt{20}} \approx 0{,}402\ \mathrm{V}$$

Rozdzielczość pomiaru jest równa:

$$\Delta_\mathrm{r} U = \frac{\Delta n}{n} U = \frac{1}{2304} 230{,}4 = 0{,}1\ \mathrm{V}$$

Można przyjąć, że wewnątrz symetrycznego przedziału wokół U, o szerokości połówkowej równej

$$\Delta U = \sqrt{\left(\frac{\delta_{\mathrm{g}} U}{100} U\right)^2 + \left(\frac{\delta_{\mathrm{g}} U_n}{100} U_n\right)^2 + \left(\Delta_{\mathrm{r}} U\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,5}{100} \cdot 230,4\right)^2 + \left(\frac{0,05}{100} \cdot 750\right)^2 + \left(0.1\right)^2} \approx 1,22 \text{ V}$$

prawdopodobieństwo wystąpienia wartości rzeczywistej mierzonego napięcia, którą reprezentuje wartość poprawna, jest w każdym punkcie jednakowe (opisuje je rozkład jednostajny). Standardowa niepewność typu B jest równa

$$u_B(U) = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}} = \frac{1,22}{\sqrt{3}} = 0,704 \text{ V}.$$

Standardowa niepewność złożona pomiaru jest równa

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = \sqrt{(0,402)^2 + (0,704)^2} \approx 0,811 \text{ V}.$$

Ostatecznie wynik zapisuje się jako $\overline{U} = (230,4 \pm 0,8)\text{V}$, gdzie liczba zapisana za symbolem ± jest wartością złożonej niepewności standardowej, a nie jest przedziałem ufności.

7. OBLICZANIE ROZSZERZONEJ NIEPEWNOŚCI ZŁOŻONEJ W POMIARACH BEZPOŚREDNICH

Opcjonalnie można *rozszerzyć* (ang. expand) złożoną niepewność standardową u_c czyli obliczyć połówkową szerokość przedziału, w którym znajdzie się błąd pomiaru ze zwiększonym prawdopodobieństwem w stosunku do prawdopodobieństwa przyjętego dla niepewności standardowej. W tym celu:

1. Rozszerza się złożoną niepewność standardową u_c do żądanego poziomu ufności α, mnożąc u_c przez odpowiedni współczynnik (kwantyl) k_α. Dokładne wyznaczenie współczynnika k_α, zależnego od żądanego poziomu ufności, jest zagadnieniem trudnym [2]. W celu uproszczenia rozważa się dwa przypadki:

   - $u_A \geq u_B$, czyli dominuje niepewność typu A o rozkładzie normalnym lub niepewność typu A jest bliska niepewności typu B;
   - $u_A < u_B$, czyli dominuje niepewność typu B o rozkładzie jednostajnym.

   Wartości k_α wyznacza się z tablicy 2. dla jednej z trzech wybranych wartości poziomu ufności α: 0,68; 0,95 i 0,99, które są zalecane przez [1].

Tablica 2

Wartości k_α w zależności od poziomu ufności α [2]

Poziom ufności α	**0,68**	**0,95**	**0,99**
$u_A \geq u_B$	0,994	1,960	2,576
$u_A < u_B$	1,179	1,645	1,715

2. Zapisuje się końcowy wynik pomiaru w postaci $x = \bar{x} \pm k_\alpha u_c$ dodając komentarz o przyjętym poziomie ufności oraz informację, że jest to niepewność złożona.

Sposób ten jest przybliżony.

Dla dużej serii wyników pomiaru ($u_A \geq u_B$), których rozrzut można scharakteryzować za pomocą rozkładu normalnego, kwantyl k_α wyznaczyć można z tablic funkcji Laplace'a [2]. Publikacja [1] zaleca stosowanie tylko kilku wartości poziomów ufności. Odpowiadające im kwantyle k_α zestawiono w tablicy 3.

Tablica 3

Wartość współczynnika k_α określającego dla rozkładu normalnego przedział o poziomie ufności α.

Poziom ufności α● %● 68,27● 9 0● 95● 95,45● 9 9● 99,73● ● Ws półczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,96 0● 2● 2,576● 3 ● ● %● 68,27● 90● 68,27● 90● 95● 90● 95● 95,45● 95● 95,45● 99● 95,45● 99● 99,7 3● ● Współczyn nik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,96 0● 2● 2,576● 3 ● ● 99● 99,73● ● W spółczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,96 0● 2● 2,576● 3 ● ● 99,73● ● Współ czynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,96 0● 2● 2,576● 3 ● ● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,96 0● 2● 2,576● 3 ● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,96

0• 2• 2,576• 3
• •
-
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
1• 1,645• 1,960
• 2• 2,576• 3•
1,645• 1,960• 2
• 2,576• 3• •
1,960• 2• 2,576
• 3• •
2• 2,576• 3• •
2,576• 3• •
3• •
•

8. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

W przypadku pomiaru pośredniego mierzona wielkość *Y* jest funkcją *M* wielkości X_m mierzonych bezpośrednio:

$$y = f(x_m)$$

gdzie *m* = 1, 2, ... *M*.

Zazwyczaj dokonuje się serii *N* pomiarów, uzyskując *N* wyników o postaci

$y_n = f(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots$

Wartość poprawną wielkości Y oblicza się ze wzoru:

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n \, , \tag{10}$$

Następnie oblicza się złożoną niepewność standardową dla średniej y:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} c_m{}^2 \cdot u \ldots} \, , \tag{11}$$

gdzie

$$c_m = \frac{\partial y}{\partial x_m} \tag{12}$$

są tzw. **współczynnikami wrażliwości**.

Niepewność $u_c(y)$ jest dobrze oszacowana jedynie przy spełnieniu następujących warunków:

- liniowość funkcji $y = f(x_m)$ jest wystarczająca na tyle, aby nie uwzględniać wyrazów wyższych rzędów w rozwinięciu w szereg Taylora; - zmienne losowe X_m oraz ich wartości średnie $\bar{x}_m$ są wzajemnie niezależne.
Poziom ufności α• %• 68,27• 90• 95• 95,45• 99• 99,73• • Współczynnik rozszerzenia k_α • - • 1• 1,645• 1,960• 2• 2,576• 3 • • %• 68,27• 90•

68,27● 90● 95●
90● 95● 95,45●
95● 95,45● 99●
95,45● 99● 99,7
3● ● Współczyn
nik rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
99● 99,73● ● W
spółczynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
99,73● ● Współ
czynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
● Współczynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
Współczynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
-
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
1● 1,645● 1,960
● 2● 2,576● 3●
1,645● 1,960● 2
● 2,576● 3● ●
1,960● 2● 2,576
● 3● ●
2● 2,576● 3● ●
2,576● 3● ●
3● ●

•

8. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

W przypadku pomiaru pośredniego mierzona wielkość Y jest funkcją M wielkości X_m mierzonych bezpośrednio:

$$y = f\left(x_m\right)$$

gdzie m = 1, 2, ... M.

Zazwyczaj dokonuje się serii N pomiarów, uzyskując N wyników o postaci $y_n = f\left(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots\right.$ Wartość poprawną wielkości Y oblicza się ze wzoru:

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n \, , \tag{10}$$

Następnie

oblicza się złożoną niepewność standardową dla średniej $\bar{y}$:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} c_m{}^2 \cdot u$$

,

(11)

gdzie

$$c_m = \frac{\partial y}{\partial x_m}$$

(12)

są tzw. **współczynnikami wrażliwości**.

Poziom ufności α● %● 68,27● 90● 95● 95,45● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● -
● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3
● ●
%● 68,27● 90● 68,27● 90● 95● 90● 95● 95,45● 95● 95,45● 99● 95,45● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● -
● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3
● ●
99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96

0• 2• 2,576• 3
• •
99,73• • Współ
czynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
• Współczynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
Współczynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
-
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
1• 1,645• 1,960
• 2• 2,576• 3•
1,645• 1,960• 2
• 2,576• 3• •
1,960• 2• 2,576
• 3• •
2• 2,576• 3• •
2,576• 3• •
3• •
•

8. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

W przypadku pomiaru pośredniego mierzona wielkość Y jest

funkcją M wielkości X_m mierzonych bezpośrednio: $y = f(x_m)$ gdzie m = 1, 2, ... M. Zazwyczaj dokonuje się serii N pomiarów, uzyskując N wyników o postaci $y_n = f(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots$ Wartość poprawną wielkości Y oblicza się ze wzoru: $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n$, (10) Następnie oblicza się złożoną niepewność standardową dla średniej $\bar{y}$: $u_c(\bar{y}) = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} c_m{}^2 \cdot}$, (11) gdzie
Poziom ufności α• %• 68,27• 9

0• 95• 95,45• 9
9• 99,73• • Ws
półczynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
%• 68,27• 90•
68,27• 90• 95•
90• 95• 95,45•
95• 95,45• 99•
95,45• 99• 99,7
3• • Współczyn
nik rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
99• 99,73• • W
spółczynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
99,73• • Współ
czynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
• Współczynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
Współczynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
-
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3

• •
1• 1,645• 1,960
• 2• 2,576• 3•
1,645• 1,960• 2
• 2,576• 3• •
1,960• 2• 2,576
• 3• •
2• 2,576• 3• •
2,576• 3• •
3• •
•

8. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

W przypadku pomiaru pośredniego mierzona wielkość Y jest funkcją M wielkości X_m mierzonych bezpośrednio:

$$y = f(x_m)$$

gdzie m = 1, 2, ... M.

Zazwyczaj dokonuje się serii N pomiarów, uzyskując N wyników o postaci $y_n = f(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots$ Wartość poprawną wielkości Y

oblicza się ze wzoru: $$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n ,$$ (10)
Poziom ufności α● %● 68,27● 90● 95● 95,45● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● %● 68,27● 90● 68,27● 90● 95● 90● 95● 95,45● 95● 95,45● 99● 95,45● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3

● ●
Współczynnik rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3
● ●
-
● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3
● ●
1● 1,645● 1,960
● 2● 2,576● 3●
1,645● 1,960● 2
● 2,576● 3● ●
1,960● 2● 2,576
● 3● ●
2● 2,576● 3● ●
2,576● 3● ●
3● ●
●

8. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

W przypadku pomiaru pośredniego mierzona wielkość *Y* jest funkcją *M* wielkości X_m mierzonych bezpośrednio:

$$y = f\left(x_m\right)$$

gdzie *m* = 1, 2, ... *M*.

Zazwyczaj dokonuje się serii *N*

pomiarów, uzyskując N wyników o postaci $y_n = f(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots$ Wartość poprawną wielkości Y oblicza się ze wzoru:

Poziom ufności α● %● 68,27● 90● 95● 95,45● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● %● 68,27● 90● 68,27● 90● 95● 90● 95● 95,45● 95● 95,45● 99● 95,45● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● ● Współczynnik

rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,96 0● 2● 2,576● 3 ● ● Współczynnik rozszerzenia k_α ● - ● 1● 1,645● 1,96 0● 2● 2,576● 3 ● ● - ● 1● 1,645● 1,96 0● 2● 2,576● 3 ● ● 1● 1,645● 1,960 ● 2● 2,576● 3● 1,645● 1,960● 2 ● 2,576● 3● ● 1,960● 2● 2,576 ● 3● ● 2● 2,576● 3● ● 2,576● 3● ● 3● ● ● **8. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH** W przypadku pomiaru pośredniego mierzona wielkość *Y* jest funkcją *M* wielkości X_m mierzonych bezpośrednio: $y = f(x_m)$
Poziom ufności α● %● 68,27● 9 0● 95● 95,45● 9

9● 99,73● ● Ws
półczynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
%● 68,27● 90●
68,27● 90● 95●
90● 95● 95,45●
95● 95,45● 99●
95,45● 99● 99,7
3● ● Współczyn
nik rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
99● 99,73● ● W
spółczynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
99,73● ● Współ
czynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
● Współczynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
Współczynnik
rozszerzenia
k_α ● -
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●
-
● 1● 1,645● 1,96
0● 2● 2,576● 3
● ●

1● 1,645● 1,960 ● 2● 2,576● 3● 1,645● 1,960● 2 ● 2,576● 3● ● 1,960● 2● 2,576 ● 3● ● 2● 2,576● 3● ● 2,576● 3● ● 3● ● ● **8. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH**
Poziom ufności α● %● 68,27● 90● 95● 95,45● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● %● 68,27● 90● 68,27● 90● 95● 90● 95● 95,45● 95● 95,45● 99● 95,45● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● 99● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia k_α● - ● 1● 1,645● 1,960● 2● 2,576● 3 ● ● 99,73● ● Współczynnik rozszerzenia

k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
• Współczynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
Współczynnik
rozszerzenia
k_α • -
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
-
• 1• 1,645• 1,96
0• 2• 2,576• 3
• •
1• 1,645• 1,960
• 2• 2,576• 3•
1,645• 1,960• 2
• 2,576• 3• •
1,960• 2• 2,576
• 3• •
2• 2,576• 3• •
2,576• 3• •
3• •
•

8. OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI POMIARÓW POŚREDNICH

W przypadku pomiaru pośredniego mierzona wielkość Y jest funkcją M wielkości X_m mierzonych bezpośrednio:

$$y = f(x_m)$$

gdzie m = 1, 2, ... M.

Zazwyczaj dokonuje się serii N pomiarów, uzyskując N wyników o postaci $y_n = f(x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots x_{M,n},)$ Wartość poprawną wielkości Y oblicza się ze wzoru:

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} y_n \,, \qquad (10)$$

Następnie oblicza się złożoną niepewność standardową dla średniej $\bar{y}$:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} c_m{}^2 \cdot u_{c,m}^2}\ , \tag{11}$$

gdzie

$$c_m = \frac{\partial y}{\partial x_m} \tag{12}$$

są tzw. **współczynnikami wrażliwości**.

Niepewność $u_c(y)$ jest dobrze oszacowana jedynie przy spełnieniu następujących warunków:

- liniowość funkcji $y = f(x_m)$ jest wystarczająca na tyle, aby nie uwzględniać wyrazów wyższych rzędów w rozwinięciu w szereg Taylora;
- zmienne losowe X_m oraz ich wartości średnie $\bar{x}_m$ są wzajemnie niezależne.

Przyjęcie założenia liniowości w przypadku silnie nieliniowych funkcji prowadzi do zaniżenia oceny niepewności. Gdy zmienne losowe X_m lub $\bar{X}_m$ są wzajemnie zależne oblicza się tzw. **kowariancję** [3].

Przy obliczaniu niepewności wielkości mierzonych pośrednio sporządza się tak zwany **bilans** (**budżet) niepewności**. Ma on postać tablicy, zawierającej w podstawowej postaci wartości poprawne poszczególnych wielkości mierzonych bezpośrednio, ich złożone niepewności standardowe, współczynniki wrażliwości oraz udział standardowej niepewności każdej wielkości mierzonej bezpośrednio w niepewności wielkości mierzonej pośrednio. W tabelach bardziej zaawansowanych budżetów niepewności podaje się dodatkowe informacje o rozkładzie prawdopodobieństwa błędów losowych, liczbie stopni swobody oraz kowariancji poszczególnych zmiennych [1].

Przykład 4

Moc wydzielaną w pewnym obwodzie prądu stałego zmierzono za pomocą woltomierza i amperomierza. Zmierzona wartość napięcia wyniosła (4,000 ±0,002) V, a zmierzona wartość prądu (1,000 ±0,004) A. W obu wynikach liczba za symbolem ± jest wartością złożonej niepewności standardowej. Obliczyć standardową niepewność pomiaru mocy i sporządzić jej bilans przy założeniu, iż można zaniedbać błąd systematyczny, spowodowany wpływem rezystancji przyrządów.

Rozwiązanie:

Poprawną wartość mocy oblicza się ze znanego wzoru:

$$P = U \cdot I = 4{,}000 \cdot 1{,}000 = 4{,}000\ \mathrm{W}$$

Ponieważ pomiar napięcia i prądu był realizowany różnymi przyrządami, można przyjąć, iż wyniki pomiaru obu wielkości jak i ich niepewności są od siebie niezależne. Wówczas standardową niepewność pomiaru mocy oblicza się z zależności

$$u_c(P) = \sqrt{c_U^2 u_c^2(U) + c_I^2 u_c^2(I)}\ , \tag{13}$$

gdzie współczynniki wrażliwości c_U oraz c_I są równe

$$c_U = \frac{\partial P}{\partial U} = I = 1{,}000 \text{ A},$$

$$c_I = \frac{\partial P}{\partial I} = U = 4{,}000 \text{ V}.$$

Po podstawieniu do (18) otrzymuje się

$$u_c(P) = \sqrt{(1{,}000)^2 (0{,}002)^2 + (4{,}000)^2 (0{,}004)^2} = \sqrt{0{,}000004 + 0{,}000256} = 0{,}0161 \approx 0{,}02 \text{ W}.$$

Zatem zmierzona moc jest równa (4,00±0,02) W, gdzie liczba za symbolem ± jest wartością złożonej niepewności standardowej, a nie jest przedziałem ufności.

Bilans niepewności pomiaru mocy przedstawiono w tablicy 4.

Tablica 4

Przykład bilansu niepewności dla pomiaru mocy prądu stałego

Symbol wielkości	Oszacowanie wielkości	Niepewność standardowa	Współczynnik wrażliwości	Niepewność składowa mocy	Udział w niepewności złożonej
X_i	x_i	$u(x_i)$	c_i	$u_i(y)$	$u_i(y)/u(y)$
$\bar{U}$	4,000 V	2 mV	1,000 A	2 mW	11%
$\bar{I}$	1,000 A	4 mA	4,000 V	16 mW	89%
P	**4,00 W**	**0,02 W**			

9. REGUŁY ZAOKRĄGLANIA WYNIKU POMIARU I NIEPEWNOŚCI

Ogólnie zapis końcowego wyniku pomiaru powinien mieć postać następującą:

$$x = x_{\text{popr}} \pm u(x) \qquad \text{(informacja o poziomie ufności i kształcie rozkładu)}$$

Końcowy wynik pomiaru powinien składać się z dwóch liczb przybliżonych, z których pierwsza wyraża poprawną wartość wielkości mierzonej, a druga określa jej niepewność.

Istotny jest sposób zaokrąglania tych liczb. Obowiązują następujące zasady:

1. Liczbę wyrażającą niepewność zaokrągla się najczęściej w górę, do liczby o jednej cyfrze znaczącej. Wynika to z faktu, że wartość niepewności nie jest dokładnie określona. W szczególnych przypadkach pozostawia się dwie cyfry znaczące. Czyni się tak gdy:
   - liczba będzie używana do dalszych obliczeń;
   - w przypadku podawania niepewności stałych fizycznych;
   - w przypadku pomiarów dokładnych;
   - jeśli po zaokrągleniu do 1 cyfry znaczącej błąd zaokrąglenia byłby większy od 20%. Na przyklad 0,1111 można zaokrąglić do 0,11 a nie do 0,2. W tym

przypadku nie zaokrągla się tej liczby w górę, lecz zgodnie z ogólnymi regułami zaokrąglania.

2. Liczbę wyrażającą wynik pomiaru zaokrągla się pozostawiając najmniej znaczącą cyfrę na tym miejscu, na którym występuje najmniej znacząca cyfra niepewności. Obowiązują następujące reguły postępowania przy zaokrąglaniu wyników pomiaru:

a) Zastępuje się przez 0 zbędne cyfry liczb całkowitych, a zbędne cyfry po przecinku dziesiętnym odrzuca się.

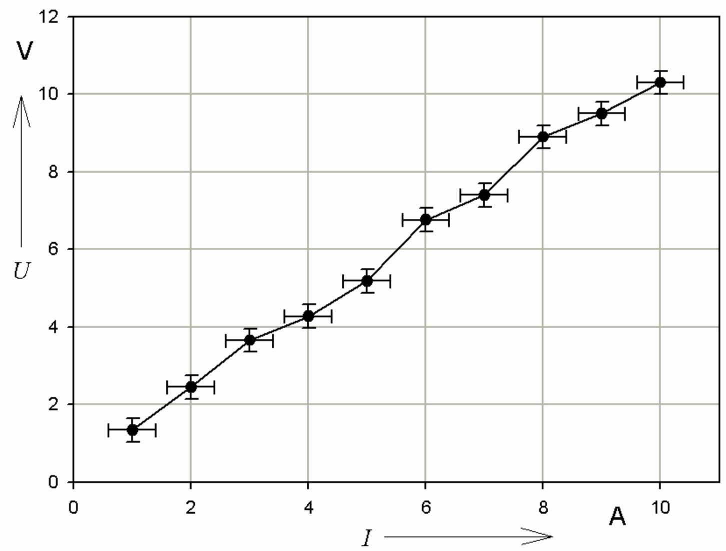
b) Jeżeli pierwsza zbędna cyfra (licząc od lewej strony) ma wartość <5, to pozostających cyfr się nie zmienia. Jeżeli ta cyfra jest >5, to najmniej znaczącą pozostającą cyfrę powiększa się o 1.

c) Jeżeli pierwszą zbędną cyfrą (licząc od lewej strony) jest 5, a cyfry z prawej strony od 5 nie są zerami, to najmniej znaczącą pozostającą cyfrę powiększa się o 1.

d) Jeżeli pierwszą zbędną cyfrą (licząc od lewej strony) jest 5, a cyfry z prawej strony od 5 są zerami, to najmniej znaczącej pozostającej cyfry nie zmienia się, jeżeli jej wartość jest liczbą parzystą. Jeżeli jej wartość jest liczbą nieparzystą, to powiększa się ją o 1.

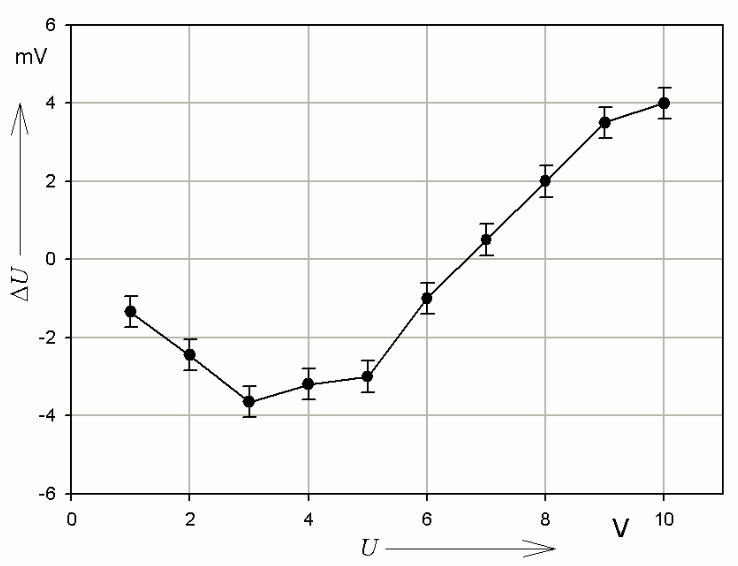
10. OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARU PREZENTOWANYCH W POSTACI WYKRESÓW

Często wyniki pomiaru prezentowane są postaci wykresów. Także w tym przypadku wykres powinien zawierać informację o niepewności przedstawionych na nim wyników pomiaru. Na rysunku 4 przedstawiono przykładowy wykres charakterystyki prądowo-napięciowej. Na uwagę zasługują charakterystyczne słupki („wąsy”), które reprezentują złożone niepewności pomiaru obu wielkości. Podpis pod rysunkiem powinien informować o sposobie interpretacji słupków niepewności.



Rys.2. Przykładowy wykres charakterystyki prądowo-napięciowej. Słupki błędów reprezentują złożone niepewności standardowe pomiaru.

Podobnie należy sporządzać wykresy błędów lub poprawek. Na rysunku 5 przedstawiono przykładowy wykres błędu. W tym przypadku zazwyczaj na wykresie zamieszcza się jedynie słupki błędów reprezentujące niepewność wyznaczenia błędu lub poprawki.



Rys.3. Przykładowy wykres błędu. Słupki błędu reprezentują złożone niepewności standardowe wyznaczenia błędu.

Na uwagę zasługuje także sposób opisania osi wykresów przedstawionych na rys.4 oraz rys.5.

11. PROGRAM ĆWICZENIA

1. Za pomocą cyfrowego woltomierza napięcia przemiennego o rozdzielczości minimum 5 cyfr znaczących wykonać serię a) N=2, b) N=4, c) N=10, d) N=30 pomiarów napięcia na wyjściu autotransformatora regulowanego. Prawidłowo zapisać końcowe wyniki pomiaru.
2. Wykonać pomiar jak w p.1, ale przy wykorzystaniu cyfrowego woltomierza napięcia przemiennego o mniejszej rozdzielczości (np. 3,5 cyfry). Prawidłowo zapisać końcowe wyniki pomiaru.
3. Wykonać pomiar jak w p.1, zastępując autotransformator programowanym generatorem funkcyjnym, wytwarzającym napięcie sinusoidalne o wartości skutecznej zbliżonej do napięcia na wyjściu autotransformatora i o częstotliwości 50 Hz. Prawidłowo zapisać końcowe wyniki pomiaru.
4. Wykonać pomiar jak w p.2, zastępując autotransformator programowanym generatorem funkcyjnym, wytwarzającym napięcie sinusoidalne o wartości skutecznej zbliżonej do napięcia na wyjściu autotransformatora i o częstotliwości 50 Hz. Prawidłowo zapisać końcowe wyniki pomiaru.

5. Porównać wyniki uzyskane w p.1, 2, 3 i 4. Wyciągnąć wnioski.
6. Dokonać pomiaru mocy prądu a) stałego b) przemiennego, wydzielanej na odbiorniku wskazanym przez prowadzącego ćwiczenie. Pomiar wykonać w układzie a) poprawnie mierzonego napięcia, b) poprawnie mierzonego prądu. Obliczyć wartość poprawną mocy, bezwzględny błąd systematyczny, poprawkę oraz względny błąd systematyczny. Sporządzić budżet niepewności i prawidłowo zapisać końcowy wynik pomiaru.
7. Dokonać pomiaru rezystancji metodą techniczną obiektu wskazanego przez prowadzącego ćwiczenie. Pomiar wykonać w układzie a) poprawnie mierzonego napięcia, b) poprawnie mierzonego prądu. Sporządzić budżet niepewności i prawidłowo zapisać końcowy wynik pomiaru.
8. Wyznaczyć charakterystykę napięciowo-prądową żarówki zasilanej napięciem przemiennym uzyskiwanym z autotransformatora. Wynik pomiaru przedstawić w postaci wykresu.
9. Za pomocą cyfrowego woltomierza napięcia przemiennego o rozdzielczości minimum 5 cyfr znaczących wyznaczyć błąd nastawy napięcia przemiennego i stałego programowanego generatora funkcyjnego. Pomiar błędu nastawy napięcia przemiennego wykonać dla kilku wartości częstotliwości z przedziału od 40 Hz do 100 kHz. Wynik pomiaru błędu nastawy przedstawić w postaci wykresu.

Uwaga: obliczenia błędów i niepewności powinny być wykonywane w trakcie przeprowadzania ćwiczenia. Zalecane jest przyniesienie na zajęcia kalkulatorów inżynierskich realizujących proste obliczenia statystyczne.

12. PYTANIA KONTROLNE

1. Podać definicję błędu bezwzględnego, poprawki oraz błędu względnego.
2. Opisać rodzaje błędów i ogólne sposoby ich wyznaczania.
3. Wymienić typy niepewności i scharakteryzować je.
4. Opisać metody wyznaczania standardowej niepewności typu A.
5. Opisać metody wyznaczania standardowej niepewności typu B.
6. Opisać metodę wyznaczania niepewności złożonej.
7. Opisać sposób sporządzania budżetu niepewności.

13. LITERATURA

[1] „Wyrażanie niepewności pomiaru“. Przewodnik. Główny Urząd Miar, Warszawa 1999

[2] Turzeniecka D., „Ocena niepewności wyniku pomiaru”, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1997

[3] Skubis T., „Podstawy metrologicznej interpretacji wyników pomiaru”, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2004

[4] Lisowski M., „Podstawy Metrologii”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011

[5] Brandt S. Analiza danych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999

[6] Skubis T. „Opracowanie wyników pomiarów. Przykłady”, Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice 2003

[7] Taylor J. „Wstęp do analizy błędu pomiarowego” Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995

[8] Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii. Wyd. GUM, Warszawa 1996

ŹRÓDŁA INTERNETOWE

[9] International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM) BIPM, JCGM 2008).

[10] Evaluation of measurement data – An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents, BIPM, JCGM, First Edition, July 2009

[11] Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement, BIPM, JCGM, First Edition, September 2008

[12] Bell S., A beginners’s guide to uncertainty of measurement, Issue 2, NPL 1999

[13] EA 4/02, Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration, European co-operation for Accreditation, December 1999

[14] Evaluation of measurement data – Supplement to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement”- Propagation of distributions using a Monte Carlo method, BIPM, JCGM, First Edition, September 2008

Opracował: prof. dr hab. inż. Marian Kampik

v.1 / 24 III 2017