

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARU

ANALIZA BŁĘDÓW

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest poznanie podstawowych pojęć i zagadnień związanych z analizą błędów pomiaru.

2. WPROWADZENIE

Umiejętność właściwego opracowania wyników pomiaru jest niezbędna w wielu dziedzinach nauki, techniki oraz gospodarki. O wysokiej randze tej problematyki świadczą prace międzynarodowych komisji, których celem jest znalezienie i ujednoczenie metod opracowania wyników pomiaru. Wyniki tych prac są publikowane i z czasem zyskują charakter normatywny, jak np. [1].

W wielu przypadkach surowy wynik pomiaru, bez jego właściwego opracowania, jest uważany za bezużyteczny.

Pomiary można ogólnie podzielić na bezpośrednie lub pośrednie. Pomiar bezpośrednim jest na przykład pomiar napięcia stałego za pomocą woltomierza. Przykładem pomiaru pośredniego jest pomiar rezystancji metodą techniczną: prąd płynący przez mierzony rezystor jest mierzony za pomocą amperomierza, a spadek napięcia na rezystorze – za pomocą woltomierza. Rezystancja obliczana jest z prawa Ohma.

3. BŁĄD I POPRAWKA

Najczęściej surowy wynik pomiaru x jest jedynie przybliżeniem wartości rzeczywistej (prawdziwej) x_{rz} wielkości mierzonej X . Różnica pomiędzy wynikiem pomiaru x a wartością rzeczywistą nazywana jest **rzeczywistym błędem bezwzględnym** Δx_{rz}

$$\Delta x_{rz} = x - x_{rz} \quad (1)$$

Wartość rzeczywista wielkości mierzonej jest znana tylko w wyjątkowych przypadkach. Dlatego pojęcie rzeczywistego błędu bezwzględnego Δx_{rz} ma niewielkie znaczenie praktyczne. W praktyce, w zależności od wymaganej dokładności pomiaru, doświadczenie pomiarowe modyfikuje się tak, aby otrzymać wartość najbliższą x_{rz} . Wartość tę nazywa się **wartością poprawną** x_{popr} . Wtedy wyrażenie na błąd bezwzględny przyjmuje postać.

$$\Delta x = x - x_{popr} \quad (2)$$

Bezwzględny błąd ze zmienionym znakiem nazywany jest **poprawką** $p(x)$

$$p(x) = -\Delta x \quad (3)$$

Poprawka dodana do wyniku pomiaru daje tzw. **wynik skorygowany** - czyli wartość poprawną.

Błąd względny δx jest to stosunek błędu bezwzględnego do wartości poprawnej

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_{\text{popr}}} \quad (4)$$

Błąd względny jest często wyrażany w procentach ($1\% = 10^{-2}$) lub promilach ($1\text{‰} = 10^{-3}$). Spotykane są także mnożniki: ppm (ang. part per million; $1\text{ ppm} = 10^{-6}$) oraz ppb (ang. part per billion; $1\text{ ppb} = 10^{-9}$), jednak ich stosowanie do wyrażania błędu wielkości elektrycznych nie jest zalecane. Na przykład względny błąd pomiaru napięcia należy zapisać w postaci $\delta U = 1\ \mu\text{V}/\text{V}$ zamiast $\delta U = 1\text{ ppm}$.

Błąd może być spowodowany różnymi czynnikami. Z tego powodu do słowa „błąd” dodaje się określenie wskazujące na jego przyczynę lub charakter. Na przykład błąd rozdzielczości jest błędem spowodowanym ograniczoną rozdzielczością, błąd przypadkowy - błędem wynikającym z losowej zmienności wyników powtarzanego doświadczenia pomiarowego itp.

4. KLASYFIKACJA BŁĘDÓW

Ogólnie błędy dzieli się na:

- 1) systematyczne,
- 2) przypadkowe,
- 3) nadmierne (grube).

Powyższy podział powstał na podstawie obserwacji zachowania się wyników pomiaru przy powtarzaniu doświadczenia pomiarowego.

Ad.1. **Błędy systematyczne** można podzielić na:

- a) błędy systematyczne stałe,
- b) błędy systematyczne zmienne.

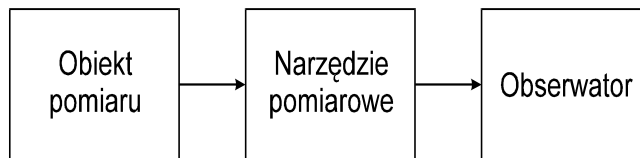
Błąd systematyczny stały można wykryć po powtórzeniu doświadczenia pomiarowego w celowo zmienionym (zmodyfikowanym) układzie warunków fizycznych.

Wykrycie stałego błędu systematycznego przez powtarzanie doświadczenia pomiarowego w niezmiennym układzie warunków fizycznych jest niemożliwe.

Jeśli wyniki powtarzanego doświadczenia pomiarowego w pozornie niezmiennym układzie warunków fizycznych charakteryzują się systematyczną zmianą (dryfem), to wyniki pomiaru obarczone są **błędem systematycznym zmiennym**. Ten rodzaj błędów powstaje np. w wyniku zmian jakiejś dominującej wielkości zakłócającej (wpływającej) np. temperatury

otoczenia. Występowanie błędu systematycznego zmiennego świadczy o tym, że podstawowy układ warunków fizycznych doświadczenia pomiarowego nie jest niezmienny. Cechą charakterystyczną tego błędu jest możliwość wyznaczenia (zdeterminowania) zależności między tym błędem i wywołującym go czynnikiem. Błąd systematyczny zmienny może być monotoniczny (rosnący albo malejący) lub okresowy.

Inny podział błędów systematycznych bierze pod uwagę ogniwo doświadczenia pomiarowego, w którym powstaje błąd. Na rys.1 przedstawiono strukturalny schemat doświadczenia pomiarowego, przydatny do sklasyfikowania błędów systematycznych.



Rys.1. Strukturalny schemat doświadczenia pomiarowego

Pierwsza składowa błędu systematycznego jest związana z obiektem pomiaru. Dołączenie przyrządu pomiarowego powoduje zmianę równowagi energetycznej w obiekcie badanym. Dochodzi zatem do naruszenia podstawowego układu warunków fizycznych, w jakich odbywa się doświadczenie pomiarowe i - w konsekwencji - do zmiany miary wielkości mierzonej. Błąd spowodowany zmianą równowagi energetycznej jest nazywany czasem błędem metody. Nazwa ta jest zbyt ogólna. Bardziej właściwe jest stosowane określenie „błąd spowodowany zmianą równowagi energetycznej”. Błąd ten zazwyczaj wyznacza się teoretycznie (oblicza).

Druga składowa błędu systematycznego jest związana z właściwościami narzędzia pomiarowego. Nazywana jest **błędem instrumentalnym**. Jeśli błąd systematyczny narzędzia pomiarowego występuje w **znamionowych warunkach użytkowania**, to nazywany jest **błędem podstawowym** narzędzia pomiarowego. Przez znamionowe warunki użytkowania rozumie się podstawowy układ warunków fizycznych, podany w normach lub przez producenta przyrządu, a także układ warunków, w których dokonano wzorcowania przyrządu lub w których przyrząd charakteryzuje się największą dokładnością. **Błąd dodatkowy** narzędzia pomiarowego powstaje, gdy warunki fizyczne odbiegają od określonych przez znamionowe warunki użytkowania. Błąd instrumentalny ma dwie składowe: **błąd modelowy** oraz **błąd wykonania narzędzia pomiarowego**. Pierwszy powstaje na skutek rozbieżności między fizyczną zasadą pomiaru (modelem) a rzeczywistymi zjawiskami zachodzącymi w narzędziu pomiarowym. Drugi jest spowodowany ograniczoną dokładnością z jaką wykonano lub wzorcowano narzędzie pomiarowe. Błąd instrumentalny można wyznaczyć przez wzorcowanie przyrządów pomiarowych użytych w doświadczeniu.

Trzecia składowa błędu systematycznego jest związana z subiektywizmem (tendencyjnością) pomiarowca. Jest szczególnie istotna w przypadku przyrządów analogowych.

Przykład 1

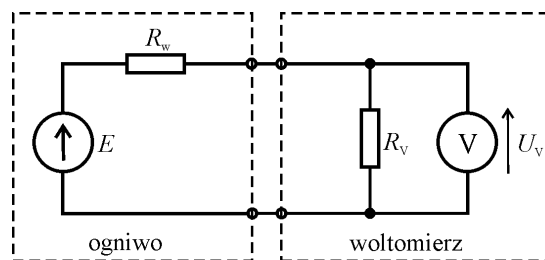
Do pomiaru siły elektromotorycznej E ogniwa o rezystancji wewnętrznej $R_w = 0,8 \Omega$ użyto woltomierza o rezystancji wewnętrznej $R_v = 1500 \Omega$. Woltomierz wskazał napięcie $U_v = 2,875 \text{ V}$. Obliczyć:

- wartość poprawną siły elektromotorycznej E ,
- bezwzględny błąd systematyczny ΔE pomiaru E ,
- poprawkę $p(E)$ pomiaru E ,
- względny błąd systematyczny δE pomiaru E .

Rozwiązanie:

- na podstawie schematu zastępczego, przedstawionego na rys.2, wartość poprawną E oblicza się ze wzoru

$$E = U_v \left(1 + \frac{R_w}{R_v} \right) = 2,875 \cdot \left(1 + \frac{0,8}{1500} \right) \approx 2,8765 \text{ V}$$

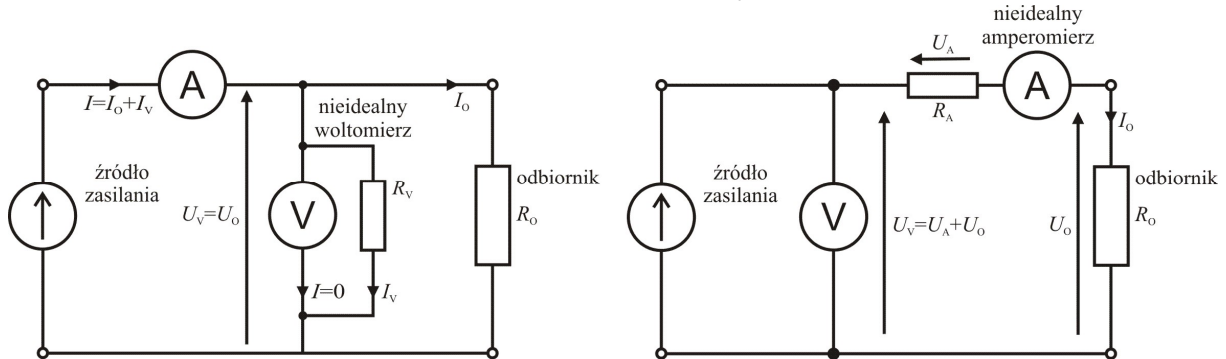


Rys.2 Schemat zastępczy układu do pomiaru siły elektromotorycznej ogniwa

- bezwzględny błąd systematyczny $\Delta E = U_v - E \approx 2,875 - 2,8765 \approx -1,5 \text{ mV}$
- poprawka $p(E) = -\Delta E = 1,5 \text{ mV}$
- względny błąd systematyczny $\delta E = \frac{\Delta E}{E} = \frac{-1,5 \cdot 10^{-3}}{2,8765} \approx -0,06\%$

Przykład 2

Na rysunku 3 przedstawiono układy pomiarowe służące do pomiaru mocy odbiornika metodą pośrednią. **Surowy wynik pomiaru** mocy odbiornika oblicza się na podstawie wskazań przyrządów woltomierza i amperomierza z zależności $P_o = U \cdot I$.



Rys. 3. Układy pomiarowe do wyznaczania mocy pobieranej przez odbiornik R_o : a) układ poprawnie mierzonego napięcia, b) układ poprawnie mierzonego prądu

W obu metodach powstają **błędy systematyczne** (błędy metody) wynikające z dodatkowej mocy wydzielanej na rezystancjach wewnętrznych zastosowanych przyrządów (R_v lub R_A).

W układzie poprawnie mierzonego napięcia błąd systematyczny $\Delta_1 P$ jest równy mocy $P_v = U \cdot I_v$, pobieranej przez nieidealny woltomierz ($R_v < \infty$). Błąd ten jest spowodowany prądem I_v , płynącym przez rezystancję wewnętrzną woltomierza, przyłączonego równolegle do odbiornika. W tym przypadku amperomierz wskazuje sumę natężeń prądów odbiornika (I_o) i woltomierza (I_v). Rezystancja zastosowanego woltomierza (multimetr Metex M-600H) wynosi 1 M Ω . Rezystancja amperomierza nie ma w tym układzie znaczenia.

W układzie poprawnie mierzonego prądu błąd systematyczny $\Delta_2 P$ jest równy mocy $P_A = I \cdot U_A$, pobieranej przez nieidealny amperomierz ($R_A > 0$). Błąd ten jest spowodowany spadkiem napięcia U_A na rezystancji amperomierza połączonego szeregowo z odbiornikiem. W tym przypadku woltomierz wskazuje sumę napięć U_o i U_A . Rezystancja zastosowanego amperomierza (multimetr Rigol DM3051) wynosi 1,025 Ω . Rezystancja woltomierza nie ma w tym układzie znaczenia.

Obliczone w ten sposób błędy systematyczne, wzięte ze znakiem ujemnym stanowią **poprawki**, które należy dodać do wyników surowych, uzyskując **wyniki poprawne** pomiaru mocy:

$$P_{o,\text{popr}} = P_o + (-\Delta_1 P) \text{ dla układu z poprawnie mierzonym napięciem}$$

oraz

$$P_{o,\text{popr}} = P_o + (-\Delta_2 P) \text{ dla układu z poprawnie mierzonym prądem.}$$

Ad. 2) **Błędy przypadkowe** występują, gdy powtarzanie doświadczenia pomiarowego w pozornie niezmiennym układzie warunków fizycznych ujawnia losową zmienność wyników. Słowo „pozornie” ma w tym przypadku szczególne znaczenie, gdyż błędy przypadkowe są spowodowane oddziaływaniem wielu zmiennych i z reguły niezależnych od siebie czynników. Deterministyczny opis takiego oddziaływania jest z reguły niemożliwy gdyż przekracza ludzkie możliwości poznawcze. Przykładem pomiaru zdominowanego czynnikiem losowym jest np. pomiar wartości chwilowej napięcia szumów rezystora. Do opisu błędów przypadkowych stosuje się modele probabilistyczne.

Ad. 3) **Błędy nadmierne** mogą być spowodowane błędem odczytu, chwilowym silnym zaburzeniem lub innymi czynnikami. Najprostszy sposób postępowania polega na odrzuceniu wyników rażąco różniących się od spodziewanych. Bardziej właściwe jest zastosowanie odpowiedniego testu statystycznego.

Końcowy wynik pomiaru powinien być wynikiem skorygowanym, tj. nie powinien zawierać znanych błędów systematycznych oraz nadmiernych.

5. CHARAKTERYZOWANIE BŁĘDÓW GRANICZNYCH PRZYRZĄDÓW POMIAROWYCH

5.1. Pojęcie błędu granicznego

Wartości skrajne błędu bezwzględno narzędzia pomiarowego, metody pomiarowej lub systemu pomiarowego nazywane są ogólnie **błędami granicznymi**. Pojęcia tego używa się obecnie wyłącznie w odniesieniu do błędów systematycznych przyrządów pomiarowych, dla których podaje się granice błędów dopuszczalnych. Są to tzw. **błędy graniczne dopuszczalne**, czyli wartości skrajne błędów dopuszczone przez warunki techniczne lub wymagania dotyczące danego przyrządu. W „Międzynarodowym Słowniku Metrologii, wydanym w 2010 r., pojęcie błędu granicznego zastąpiono terminem „**największy dopuszczalny błąd pomiaru**” (ang. *maximum permissible error*, skrót *m.p.e.*). Dawniej pojęcie błędu granicznego odnoszono również do błędów przypadkowych.

5.2. Charakteryzowanie błędów granicznych przyrządów cyfrowych

Błąd graniczny przyrządu cyfrowego może być podany w postaci:

- 1) jednoskładnikowej,
- 2) wieloskładnikowej.

Ad.1)

Błąd podstawowy przyrządów cyfrowych może być podany jednoskładnikowo w postaci granic dopuszczalnych błędów bezwzględnych. W taki sposób podaje się niedokładność przyrządów do pomiarów długości, między innymi suwmiarek cyfrowych. Na przykład

granice dopuszczalnego błędu suwmiarki mogą być równe $\pm 0,03$ mm. Zazwyczaj błąd ten uwzględnia błąd rozdzielczości odczytu, równy typowo $\pm 0,01$ mm.

Ad.2)

Wartości błędów podstawowych przyrządów cyfrowych podaje się zwykle w postaci wieloskładnikowej. Na przykład w instrukcji obsługi woltomierza cyfrowego może być zawarta informacja, że dla danego zakresu błąd podstawowy jest złożony z trzech składników, określonych następująco:

- a) $\pm 0,015$ % wartości mierzonej (wskazanej), (ang. *read*),
- b) $\pm 0,002$ % wartości charakterystycznej (ew. końcowej) zakresu, (ang. *range*),
- c) ± 1 cyfra na najmniej znaczącej pozycji wyświetlacza.

W tym przypadku, o ile w dokumentacji przyrządu nie zaleca się innego sposobu, największy dopuszczalny błąd pomiaru oblicza się ze wzoru:

$$\Delta_{gc}x = \pm \left(\frac{\delta_g x}{100} x + \frac{\delta_g x_n}{100} x_n + \Delta_r x \right) \quad (5)$$

w którym:

- $\delta_g x$ – wyrażony w % względny błąd graniczny wartości mierzonej (wskazanej przez przyrząd),
- $\delta_g x_n$ – wyrażony w % względny błąd graniczny wartości końcowej zakresu,
- x – wartość zmierzona (odczytana),
- x_n – wartość charakterystyczna zakresu pomiarowego (zakres),
- $\Delta_r x$ – granice pełzania wskazań przyrządu (offset) lub jego rozdzielczość (ziarno dyskretyzacji), wyrażone w jednostkach wartości mierzonej.

Ostatni składnik może być wyrażony przez podanie liczby cyfr Δn na najmniej znaczącej pozycji wyświetlacza (ang. *Least Significant Digit, LSD*). Składnik Δn może mieć wartość 1 lub większej liczby cyfr, na przykład 3, a nawet 20 dla niskich zakresów pomiarowych, gdzie występuje większy wpływ szumów, dryftów i zakłóceń. Wówczas

$$\Delta_r x = \frac{\Delta n}{n} x \quad (6)$$

gdzie:

- n – wartość odczytana z wyświetlacza przyrządu bez uwzględnienia przecinka dziesiętnego,
- x – wartość zmierzona (odczytana).

Każda ze składowych błędów granicznego przyrządu cyfrowego określa granice dopuszczalnego błędu. W rzeczywistości może on przyjąć dowolną wartość mieszczącą się w tych granicach, którą można wyznaczyć podczas wzorcowania przyrządu pomiarowego. W przypadku, gdy rzeczywista wartość tego błędu nie jest znana, to przyjmuje się, że wszystkie

wartości wewnątrz przedziału, określonego przez granice dopuszczalnego błędu, są jednakowo prawdopodobne. Innymi słowy charakteryzuje je jednostajny rozkład prawdopodobieństwa, nazywany rozkładem prostokątnym.

Przykład 3

Obliczyć graniczny błąd bezwzględny pomiaru napięcia $U = 9,865 \text{ V}$ za pomocą woltomierza cyfrowego na zakresie $U_n = 9,865 \text{ V}$. W instrukcji obsługi woltomierza producent zalecił obliczenie granicznego błędu podstawowego pomiaru jako sumy arytmetycznej trzech składników, określonych następująco:

- $\pm 0,015 \%$ wartości mierzonej,
- $\pm 0,002\%$ wartości charakterystycznej zakresu, (ang. *range*),
- ± 1 cyfra na najmniej znaczącej pozycji wyświetlacza

Rozwiązanie

Graniczny błąd bezwzględny jest równy:

$$\Delta_{\text{gc}} x = \pm \left(\frac{\delta_{\text{g}} U}{100} U + \frac{\delta_{\text{g}} U_n}{100} U_n + \frac{\Delta n}{n} x \right) = \pm \left(\frac{0,015}{100} 9,865 + \frac{0,002}{100} 10 + \frac{1}{9865} 9,865 \right) = \pm 2,68 \text{ mV}$$

5.3. Błędy graniczne przyrządów analogowych

Bezwzględny błąd wskazania przyrządu analogowego może przyjmować różne wartości w różnych punktach podzielnicy przyrządu. Jednak nie powinien on przekroczyć określonej granicy dopuszczalnego błędu, czyli błędu granicznego. Producenci podają bezwzględne błędy graniczne dla następujących przyrządów: przymiarów długości, suwmiarek, mikrometrów itp. Dla analogowych elektrycznych przyrządów pomiarowych określa się błąd graniczny dla danego zakresu pomiarowego a ich niedokładność określa się **klasą dokładności**. Przyrządy pomiarowe można zakwalifikować do odpowiedniej klasy, jeżeli spełniają wymagania metrologiczne, dotyczące utrzymania dopuszczalnych błędów w określonych granicach, zawarte w odpowiedniej normie (np. PNE-06501-1). Klasa uwarunkowana jest między innymi konstrukcją przyrządu pomiarowego. Na niedokładność pomiarów, oprócz klasy przyrządu, wpływa również niedokładność odczytu, która nie powinna być większa niż $1/5$ błędu granicznego wynikającego z klasy. niektórych przyrządów dopuszcza się odczyt z niedokładnością $1/3$ błędu granicznego wynikającego z klasy przyrządu. Przyrządy ze wskazówką materialną klasy 0,5 i wyższej wyposażone są w lusterko, umożliwiające uniknięcie błędu paralaksy, i cienką wskazówkę. Dla tego typu przyrządów, a także dla przyrządów ze wskazówką świetlną, możliwy jest odczyt z niedokładnością $\pm 0,1$ lub $\pm 0,2$ działki.

Parametrem klasy dokładności przyrządu analogowego jest wskaźnik klasy, który jest może być liczbą określającą klasę dokładności i wyznaczającą graniczne wartości względnego błędu podstawowego wyrażonego w % wartości odniesienia.

Spotykane są wskaźniki klas w postaci liter. Przy liczbowym wskaźniku klasy oznaczenie % jest pomijane. Ponadto wskaźniki klasy przyrządów analogowych takich jak np. woltomierze lub amperomierze mają wartości znormalizowane szeregiem liczbowym: 0,1; 0,2; 0,5; 1. Dopuszcza się również wskaźniki klas postaci: 0,3; 1,5; 2,5 i 3.

Wskaźnik klasy zawsze podaje się na podzielni przyrządu wskazówkowego. W warunkach odniesienia wskaźnik klasy (kl) powinien spełniać zależność:

$$kl \geq \frac{\Delta_g x}{x_n} 100 \quad (7)$$

gdzie:

$\Delta_g x$ – bezwzględny błąd graniczny (największa wartość błędu ze wszystkich wskazań na danym zakresie pomiarowym),
 x_n – wartość odniesienia.

Wartościami odniesienia mogą być:

- 1) dla przyrządów wskazówkowych, mających dolną granicę wskazań równą zero, wartością odniesienia jest górna ocyfrowana granica zakresu wskazań,
- 2) dla przyrządów wskazówkowych, dla których dolna granica wskazań jest różna od zera, wartością odniesienia jest różnica między dolną x_{nd} a górną x_{ng} granicą wskazań przyrządu pomiarowego, $x_n = x_{ng} - x_{nd}$,
- 3) dla przyrządów o nieokreślonej górnej granicy wartością odniesienia jest wartość zmierzona (wskazana) x . Wówczas wskaźnik klasy jest otoczony kółkiem.
- 4) dla przyrządów o silnie nierównomiernej podziałce (np. omiomyerze analogowe) wartością odniesienia jest maksymalny kąt wychylenia wskazówki α . Wówczas pod wskaźnikiem klasy umieszczony jest symbol przypominający spłaszczoną literę „V”. Uwaga: wskaźnik klasy reprezentuje graniczny względny błąd wyrażony w % długości podziałki. Obecnie rzadko stosuje się ten sposób, z uwagi na utrudnione obliczanie,
- 5) dla wzorców jednomiarowych (o nienastawialnej wartości) wartością odniesienia jest wartość nominalna wzorca,
- 6) dla wzorców nastawnych (dekadowych rezystorów, kondensatorów itp.) – wartość nastawiona dla danej dekady. Wzorce nastawne wielodekadowe mogą mieć różne

wskaźniki klasy dla każdej dekady. Dla wzorów nastawnych (dekadowych rezystorów, kondensatorów itp.) klasa odniesiona jest najczęściej do wartości nastawy danej dekady i jest równa $(1; 2; 5) \cdot 10^k$, gdzie k jest całkowitą liczbą niedodatnią.

Ze wzoru (5.6) wynika, że graniczny błąd bezwzględny $\Delta_g x$ pomiaru przyrządem analogowym o niedokładności podanej za pomocą wskaźnika klasy kl jest równy:

$$\Delta_g x = kl \frac{x_n}{100}, \quad (8)$$

czyli „klasa razy wartość odniesienia przez 100”. Graniczny błąd względny $\delta_g x$, wyrażony w %, jest równy:

$$\delta_g x = \frac{\Delta_g x}{x} = kl \cdot \frac{x_n}{x} \quad \text{lub} \quad \delta_g x = kl \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha} \quad (9)$$

Przykład 4

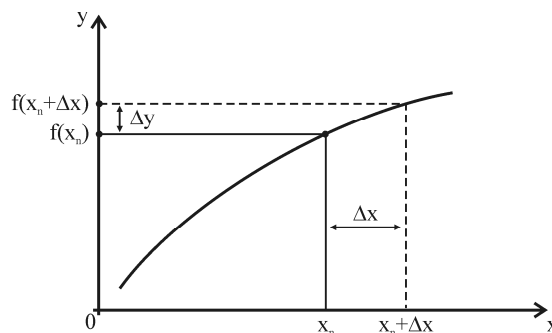
Obliczyć graniczny błąd bezwzględny pomiaru analogowego woltomierza klasy 0,5 o zakresie pomiarowym $U_n = 100 \text{ V}$.

Rozwiązanie

Graniczny błąd bezwzględny jest równy $\Delta_g U = kl \frac{U_n}{100} = 0,5 \frac{100 \text{ V}}{100} = 0,5 \text{ V}$

6. PRZENOSZENIE BŁĘDÓW DLA FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Rozważmy funkcję jednej zmiennej $y = f(x)$. Załóżmy, że $f(x)$ jest funkcją rosnącą.



Z wykresu wynika, że:

$$\Delta y = f(x_n + \Delta x) - f(x_n)$$

Z analizy matematycznej wynika, że dla dostatecznie małego Δx :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Co można zapisać jako

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x = f'(x) \Delta x \quad (10)$$

czyli dla błędów otrzymuje się następującą regułę przenoszenia:

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \Delta x$$

w której uwzględnia się znak pochodnej (Δy może być dodatnie jak i ujemne).

Przykład 5

Niech $y = x^2$, wówczas:

$$f'(x) = 2x$$

Podstawiając do (1) otrzymuje się:

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x \quad / : y = x^2$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{2x}{x^2} \Delta x = 2 \frac{\Delta x}{x}$$

Czyli

$$\delta_y = 2\delta_x,$$

gdzie δ_y i δ_x są błędami względnymi y i x .

7. PRAWO PROPAGACJI BŁĘDÓW DLA FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

Dla funkcji wielu zmiennych $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ prawo propagacji błędów przyjmuje postać:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} \Delta x_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (11)$$

Pochodne cząstkowe oblicza się w punkcie, w którym obliczany jest błąd.

Przykład 6

Obliczyć objętość V walca, którego wysokość $h = 1,00$ m zmierzono przymiarem o błędzie granicznym $\Delta h = 0,01$ m, a średnicę $d = 0,100$ zmierzono przyrządem o błędzie granicznym równym $\Delta d = 0,001$ m. Obliczyć graniczny bezwzględny błąd wyznaczenia objętości walca.

Rozwiązanie

Ze wzoru na objętość walca:

$$V = \pi r^2 h = \pi \frac{d^2}{4} h = \pi \frac{(0,100)^2}{4} 1,00 = 7,854 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Korzystając z prawa propagacji błędów otrzymuje się:

$$\Delta V = \left. \frac{\partial V}{\partial d} \right|_V \cdot \Delta d + \left. \frac{\partial V}{\partial h} \right|_V \cdot \Delta h = c_d \cdot \Delta d + c_n \cdot \Delta h$$

Gdzie c_d i c_n są tzw. współczynnikami wrażliwości:

$$c_d = \left. \frac{\partial V}{\partial d} \right|_V = \pi \frac{2d}{4} h = \frac{\pi dh}{2} = \frac{\pi \cdot 0,100 \cdot 1,00}{2} = 0,157$$

$$c_n = \left. \frac{\partial V}{\partial h} \right|_V = \pi \frac{2d^2}{4} = \frac{\pi(0,100)^2}{4} = 7,854 \cdot 10^{-3}$$

Podstawiając:

$$\Delta V = c_d \cdot \Delta d + c_n \cdot \Delta h = 0,157 \cdot 0,001 + 7,854 \cdot 10^{-3} \cdot 0,01 = 0,157 \cdot 10^{-3} + 0,07854 \cdot 10^{-3} \\ \cong 0,236 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Ostatecznie

$$V = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ z granicznym błędem bezwzględnym } 0,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

Metoda ta nazywana jest „metodą różniczki zupełnej”

8. PROGRAM ĆWICZENIA

1. Dokonać pomiaru mocy prądu a) stałego b) przemiennego, wydzielanej na odbiorniku wskazanym przez prowadzącego ćwiczenie. Pomiar wykonać w układzie a) poprawnie mierzonego napięcia, b) poprawnie mierzonego prądu. Obliczyć wartość poprawną mocy, bezwzględny błąd systematyczny, poprawkę oraz względny błąd systematyczny. Sporządzić budżet niepewności i prawidłowo zapisać końcowy wynik pomiaru.
2. Dokonać pomiaru rezystancji metodą techniczną obiektu wskazanego przez prowadzącego ćwiczenie. Pomiar wykonać w układzie a) poprawnie mierzonego napięcia, b) poprawnie mierzonego prądu. Obliczyć wartość poprawną rezystancji, bezwzględny błąd systematyczny, poprawkę oraz względny błąd systematyczny. Sporządzić budżet niepewności i prawidłowo zapisać końcowy wynik pomiaru.

3. Za pomocą cyfrowego woltomierza napięcia przemiennego o rozdzielczości minimum 5 cyfr znaczących wyznaczyć błąd nastawy napięcia przemiennego i stałego programowanego generatora funkcyjnego. Pomiar błędu nastawy napięcia przemiennego wykonać dla kilku wartości częstotliwości z przedziału od 40 Hz do 100 kHz. Wynik pomiaru błędu nastawy przedstawić w postaci wykresu.
4. Dokonać dwóch pomiarów mocy prądu przemiennego (dla różnych napięć z autotransformatora), wydzielanej na odbiorniku wskazanym przez prowadzącego ćwiczenie.

Uwaga: obliczenia błędów powinny być wykonywane w trakcie przeprowadzania ćwiczenia. Zalecane jest przyniesienie na zajęcia kalkulatorów.

9. PYTANIA KONTROLNE

1. Podać definicję błędu bezwzględnego, poprawki oraz błędu względnego.
2. Opisać rodzaje błędów i ogólne sposoby ich wyznaczania.
3. Podać przykładowy sposób wyznaczania błędu granicznego przyrządu pomiarowego o odczycie cyfrowym.
4. Podać przykładowy sposób wyznaczania błędu granicznego przyrządu pomiarowego o odczycie analogowym.
5. Podać przykład przenoszenia błędu na przykładzie funkcji jednej zmiennej.
6. Podać przykład zastosowania prawa propagacji błędów błędu na przykładzie funkcji wielu zmiennych.

10. LITERATURA

- [1] „Wyrażanie niepewności pomiaru“. Przewodnik. Główny Urząd Miar, Warszawa 1999
- [2] Lisowski M., „Podstawy Metrologii”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2011
- [3] Brandt S. Analiza danych, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999
- [4] Taylor J. „Wstęp do analizy błędu pomiarowego” Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995
- [5] Międzynarodowy słownik podstawowych i ogólnych terminów metrologii. Wyd. GUM, Warszawa 1996

ŹRÓDŁA INTERNETOWE

- [9] International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM) BIPM, JCGM 2008).

Opracował: prof. dr hab. inż. Marian Kampik

v.1 / 24 III 2017